Mathématiques : rappels

1 Fractions

- Somme de deux fractions :
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b\,d}$$
- Produit de deux fractions :
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$
- Rapport de deux fractions :
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

2 Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$
- Coefficient du développement de $(a+b)^n$:

ordre	coefficients	développement
2	1 2 1	$a^2 + 2\,ab + b^2$
3	1 3 3 1	$a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$
4	1 4 6 4 1	$a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4\,ab^3 + b^4$
5	1 5 10 10 5 1	$a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$

Pour développer $(a-b)^n$ il suffit de remplacer b par $-b$ ce qui revient à alterner les signes $+$ et $-$, par exemple :
$$(a-b)^4 = a^4 - 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 - 4\,ab^3 + b^4$$

3 Puissances

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$
- $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4 Logarithmes

Relation générale

$$\boxed{y = \log_a x \quad \leftrightarrows \quad x = a^y}$$

Notation IUPAC recommandée $\log_{10} = \lg$ et $\log_e = \ln$

- $\lg(a \times b) = \lg a + \lg b$
- $\lg\left(\dfrac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$
- $\lg a = x \quad \Rightarrow \quad a = 10^x$
- $\ln b = y \quad \Rightarrow \quad b = \exp(y) = e^y$
- $\lg b = \dfrac{\ln b}{\ln 10}$
- $\lg x^n = n \, \lg x$

5 Valeurs de logarithmes décimaux

Connaitre	Calculer	Comment
$\lg 2 = 0,301$		
$\lg 3 = 0,477$		
	$\lg 4 = 0,60$	$\lg 4 = \lg 2^2 = 2 \, \lg 2 = 0,602$
	$\lg 5 = 0,70$	$\lg 5 = \lg(10/2) = 1 - \lg 2 = 0,699$
	$\lg 6 = 0,777$	$\lg 6 = \lg(3 \times 2) = \lg 3 + \lg 2 = 0,778$
$\lg 7 = 0,745$		
	$\lg 8 = 0,90$	$\lg 8 = \lg 2^3 = 3 \, \lg 2 = 0,903$
	$\lg 9 = 0,954$	$\lg 9 = \lg 3^2 = 2 \, \lg 3 = 0,954$

6 Équation du second degré

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

- si le discriminant $\Delta = \sqrt{b^2 - 4\,a\,c} > 0$ alors deux racines
- $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$

- La somme des racines vaut $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
- Le produit des racines vaut $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

7 Primitives

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u + cst \qquad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\int \exp(a\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\exp(a\,x)}{a} + \mathrm{cst}$$

8 Dérivées

$$\frac{\mathrm{d}u^n}{\mathrm{d}u} = n\,u^{n-1} \qquad \frac{\mathrm{d}[u(x)]^n}{\mathrm{d}x} = n\,[u(x)]^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln u}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u} \qquad \frac{\mathrm{d}\ln u(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u(x)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\exp u}{\mathrm{d}u} = \exp u \qquad \frac{\mathrm{d}\exp u(x)}{\mathrm{d}x} = \exp u \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}(u\,v) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u \qquad \mathrm{d}(u/v) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$$

Fonction composées : u, v et w étant des fonctions définies, continues et dérivables des variables x, y, z et F une fonction f définie, continue et dérivable des variables u, v et w :

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y + f'_z\,\mathrm{d}z$$

où par exemple :

$$f'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

9 Développement en série de fonctions usuelles

valables pour toute valeur de x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + ... + \frac{x^n}{n\,!} + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} ...... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} ...... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + ...$$

valables pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,x^2 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\,x^3 + ...$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

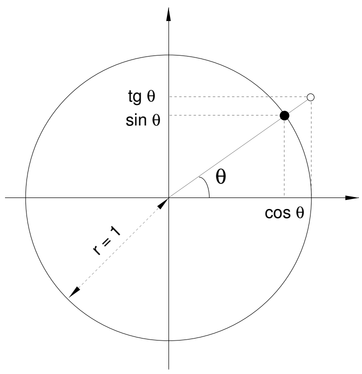
10 Développement en série de Taylor

La fonction f étant continue et dérivable sur $\in [a, b]$ ou $\in [a, a+h]$

$$f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a) = h\, f'(a) + \frac{h^2}{2\,!}\, f''(a) + ... + \frac{h^n}{n\,!}\, f^n(a) + ...$$

11 Cercle trigonométrique

- Définition des grandeurs trigonométriques à partir du cercle trigonométrique de rayon unité :



- Définitions :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \coth\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

12 Relations trigonométriques

- Angles opposés (Fig. 1a) :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

- Angles dont la somme ou la différence est égale à π (Fig. 1b) :

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = -\tan\theta$$
$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \qquad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = \tan\theta$$

- Angles dont la différence ou la somme est égale à $\pi/2$ (Fig. 2) :

$$\sin(\theta+\pi/2) = \cos\theta \qquad \cos(\theta+\pi/2) = -\sin\theta \qquad \tan(\theta+\pi/2) = -1/\tan\theta$$
$$\sin(\theta-\pi/2) = \cos\theta \qquad \cos(\theta-\pi/2) = \sin\theta \qquad \tan(\theta-\pi/2) = 1/\tan\theta$$

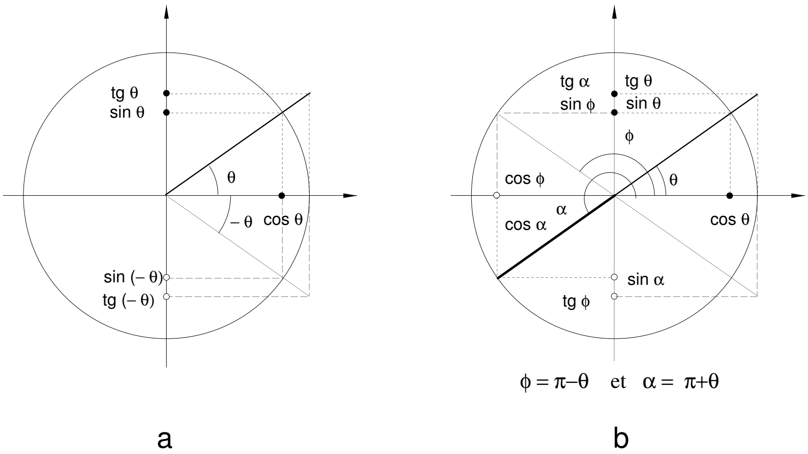


FIG. 1 – Angles : opposés (a), dont la somme ou la différence est égale à π (b).

13 Relations trigonométriques complémentaires

- Pour se souvenir des relations :

$$\cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q$$
$$\sin(p+q) = \sin p \cos q + \cos p \sin q$$

utiliser la mnémotechnique suivante

$$\cos(p+q) \rightarrow \text{pas de panachage, signe contraire} \rightarrow \cos\cos - \sin\sin$$
$$\sin(p+q) \rightarrow \text{panachage, signe identique} \rightarrow \sin\cos + \cos\sin$$

Ces relations permettent de retrouver facilement les relations $\cos(p-q)$, $\sin(p-q)$, et bien sur $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ si l'on se souvient que $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. Par exemple :

$$\cos(p-q) = \cos p \cos(-q) - \sin p \sin(-q)$$
$$\cos(p-q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q$$

- Relation de Moivre

$$(\cos a + i\ \sin a)^n = \cos(n\,a) + i\ \sin(n\,a) =$$

14 Les nombres complexes

- Forme cartésienne $z = a + j\,b$
- Forme polaire $z = |z|\,(\cos\theta + j\ \sin\theta) = |z|\,\mathrm{e}^{j\,\theta}$ où $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta = \arctan(b/a)$
- $z^* = a - j\,b$ est la forme conjuguée du complexe $z = a + j\,b$ (mêmes modules, phase opposées)

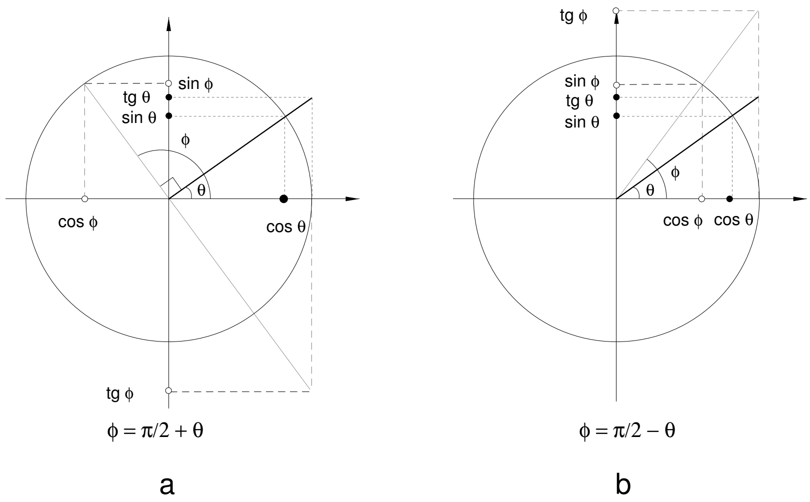


FIG. 2 – Angles dont la différence (a) ou la somme (b) est égale à $\pi/2$.

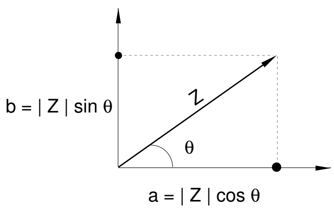


FIG. 3 – Représentation géométrique d'un nombre complexe.

- Produit de deux nombres complexes :

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + j\,\sin\theta_1) = |z_1|\,\mathrm{e}^{j\,\theta_1}$$
$$z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + j\,\sin\theta_2) = |z_2|\,\mathrm{e}^{j\,\theta_2}$$

produits des modules somme des phases :

$$z_1\,z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + j\,\sin(\theta_1+\theta_2)) = |z_1|\,|z_2|\,\mathrm{e}^{j\,(\theta_1+\theta_2)}$$

- Rapport : rapport des modules différences des phases :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\theta_1-\theta_2) + j\,\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{j\,(\theta_2-\theta_1)}$$

- Racine d'un nombre complexe :

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|\,(\cos\theta + j\,\sin\theta)} = \sqrt{|z|}\,(\cos\theta/2 + j\,\sin\theta/2)$$
$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\,(\cos\frac{\theta}{n} + j\,\sin\frac{\theta}{n})$$

- Relation d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}$$

15 Transformées de Laplace

- La transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ s'exprime selon :

$$F(p) = \mathrm{TL}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \exp(-p\,t)dt \tag{1}$$

où l'opérateur de Laplace p (noté s dans la littérature anglaise) est un nombre complexe : $p = \sigma + j\omega$, avec $j = \sqrt{-1}$.

La transformée de Laplace d'une fonction est notée en général en majuscule : $\Delta E(p) = \mathrm{TL}[\Delta e(t)]$ et $\Delta S(p) = \mathrm{TL}[\Delta s(t)]$.

- Transformées de Laplace de quelques fonctions temporelles usuelles causales pour lesquelles $f(0^-) = 0$:

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$p\,F(p)$	a	$\dfrac{\mathrm{a}}{p}$	$\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\mathrm{a}}{p^{3/2}}$
$\exp(-\dfrac{t}{\mathrm{a}})$	$\dfrac{\mathrm{a}}{1+\mathrm{a}\,p}$	$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$